Kinetische Gleichungen für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden

Gerlich, Gerhard
Wulbrand, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 29, 1978, S.97-105

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Kinetische Gleichungen für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden

Von **Gerhard Gerlich** und **Wilhelm Wulbrand**

Lehrstuhl B für Theoretische Physik der Technischen Universität Braunschweig

Vorgelegt von Herrn Richter

1. Einleitung

In der Theorie stochastischer Prozesse und in der statistischen Mechanik versteht man unter kinetischen Gleichungen Differentialgleichungen für zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsdichten, die in der Regel auf das Lebesgue-Maß bezogen sind. Dies ist für unendlich-dimensionale Räume nicht möglich, da sich für sie kein dem Lebesgue-Maß entsprechendes Maß definieren läßt (vgl. z.B. [1], S.102, [2], S. 52). Keine besonderen Schwierigkeiten macht in unendlich-dimensionalen Räumen die Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Deshalb ist es praktisch, für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden Wahrscheinlichkeitsdichten gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß zu beziehen, das möglichst viele nützliche Eigenschaften des Lebesgue-Maßes hat. Die herausragende Eigenschaft des Lebesgue-Maßes ist seine Beziehung zur üblichen Differentiation, die gekoppelt ist mit anderen Eigenschaften. Wir werden hier eine Reihe der wichtigsten Beziehungen aufführen, um darlegen zu können, welche Eigenschaften für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden durch Modifikation beibehalten werden können, welche nicht. Die sich durch die Veränderung des Bezugsmaßes ergebenden Konsequenzen für kinetische Gleichungen werden am Schluß behandelt.

2. Definition der Bezugsmaße*)

Als mathematisches Modell für die Variablen eines Systems mit endlich vielen Freiheitsgraden dient hier der übliche n-dimensionale reelle Raum R^n. Diesen Raum kann man auch als Funktionsvektorraum der Abbildungen x von $\{1,\ldots,n\}$ in die reellen Zahlen betrachten, bei denen die Funktionen x angegeben werden durch das n-tupel der Funktionswerte

$$x \equiv (x^1,\ldots,x^i,\ldots,x^n). \tag{1}$$

Dieses n-tupel ist ein Element des n-fachen cartesischen Produkts des R^1 mit sich selbst. Entsprechend kann man ein unendlich-faches cartesisches Produkt des R^1 mit sich selbst über einer unendlichen Indexmenge I als den Funktionsvektorraum der

*) Alle nicht erläuterten maßtheoretischen Begriffe findet man bei Bauer [3].

Abbildungen von I in die reellen Zahlen betrachten, den man schreibt als R^I. Wenn es nötig ist, werden hier sowohl Einschränkungen für I, als auch für die zugelassenen Abbildungen gemacht. Für ein allgemeines Element dieses Vektorraums werden wir auch schreiben

$$x \equiv (\ldots, x^i, \ldots). \tag{2}$$

Wir verwenden für den R^1 grundsätzlich als σ-Algebra die Lebesgue meßbaren Mengen und für das Maß des i-ten Faktors schreiben wir $W_i(dx^i)$, $\mu_i(dx^i)$ bzw. $\mu_L(dx^i)$, wobei für die dx^i meßbare Teilmengen des R^1 einzusetzen sind. Unter dem Integralzeichen kennzeichnen die dx^i in der üblichen Weise die Integrationsvariablen. Sind die W_i Wahrscheinlichkeitsmaße, wird auf der Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{i\in I} \mathbf{A}_i$ des R^I durch

$$W(dx) = \bigotimes_{i\in I} W_i(dx^i) \tag{3}$$

eindeutig ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert (vgl. z. B. [3], S. 159, [4], S. 157). Für $I = \{1, \ldots, n\}$ kann man anstelle von Wahrscheinlichkeitsmaßen auch das Lebesgue-Maß $\mu_L(dx^i)$ für die einzelnen Faktoren wählen, und man erhält nach dem Vervollständigen das n-dimensionale Lebesgue-Maß

$$\mu_L(dx) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_L(dx^i). \tag{4}$$

3. Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Folgende Eigenschaften des n-dimensionalen Lebesgue-Maßes sind besonders wichtig. Auf die Angabe der üblichen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktionen wird verzichtet. Man findet sie z. B. in [3], [5]–[9].

1) Es gilt der Satz von Fubini: Die Integration bezüglich $\mu_L(dx)$ des R^n läßt sich auf eindimensionale Integrationen zurückführen, und auf die Reihenfolge der Integrationen kommt es nicht an, symbolisch geschrieben als

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mu_L(dx) &= \int \ldots \int f(x)\,\mu_L(dx^1)\ldots\mu_L(dx^n) \\ &= \int \ldots \int f(x)\,\mu_L(dx^{i_1})\ldots\mu_L(dx^{i_n}).\end{aligned} \tag{5}$$

2) Das Lebesgue-Maß „kehrt“ die übliche partielle Differentation „um“ (partielle Integration):

$$\begin{aligned}&\int_{a^i \le x^i \le b^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f(\ldots, x^j, \ldots)\,\mu_L(dx) \\ &= \int_{\substack{a^i \le x^i \le b^i \\ i \neq j}} f(\ldots, b^j, \ldots) \bigotimes_{\substack{i\in I \\ i\neq j}} \mu_L(dx^i) - \int_{\substack{a^i \le x^i \le b^i \\ i \neq j}} f(\ldots, a^j, \ldots) \bigotimes_{\substack{i\in I \\ i\neq j}} \mu_L(dx^i).\end{aligned} \tag{6}$$

3) Das Lebesgue-Maß rechnet sich in bestimmter Weise bei Abbildungen des R^n um. Es sei $J(x') = \mathrm{Det}\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x'^n}\right)$ die zu der Abbildung φ gehörende Jacobideterminante, dann gilt

$$\int_A f(x)\,\mu_L(dx) = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(x'))\,|\,J(x')\,|\,\mu_L(dx'). \tag{7}$$

Diese Formel hat eine Reihe praktischer Konsequenzen:

3a) Das Lebesgue-Maß ist invariant gegen Umnumerieren der Variablen, d.h. es gilt $|J(x')| = 1$ für $x'^1 = x^{i_1}, \ldots, x'^n = x^{i_n}$, wenn $(i_1, \ldots, i_n)$ das Bild einer Permutation von $(1, \ldots, n)$ ist.

3b) Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant, d.h. es ist $|J(x')| = 1$ für $x'^i = x^i + c^i$, wenn c^i beliebige Konstanten sind.

3c) Das Lebesgue-Maß ist invariant gegen Drehungen des R^n: $|J(x')| = 1$ für $x = D(x')$, wobei D eine Drehung ist, d.h. es gilt $\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = \sum_i (D^i(x'))^2 = \sum_i (x'^i)^2$.

4) Die in 2 angegebene Umkehrung der Differentation durch die Lebesgue-Integration läßt sich (bei Anwendung der Summationskonvention) so schreiben, daß sie für die in 3 angegebenen Abbildungen invariant bleibt (Gauß'sche Integralformel, vgl. z.B. [5], [8], [10], [11]):

$$\delta^{jK}_{1\ldots n} \int \frac{\partial}{\partial x^j} f_K(\ldots, x^j, \ldots)\, \mu_L(dx) \tag{8}$$
$$= \delta^{jK}_{1\ldots n} \int f_K(\ldots, b^j, \ldots) \bigotimes_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \mu_L(dx^i) - \delta^{jK}_{1\ldots n} \int f_K(\ldots, a^j, \ldots) \bigotimes_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \mu_L(dx^i).$$

Hier ist $\delta^{jK}_{1\ldots n}$ das (verallgemeinerte) Kroneckersymbol und die f_K sind die Komponenten eines (n-1)-Kovektorfeldes.

4. Übertragung auf das Produkt der Wahrscheinlichkeitsmaße

Wenn man in den Formeln des vorigen Abschnitts $\mu_L(dx)$ formal ersetzen will durch das in (3) gekennzeichnete Maß, ist zuerst zu beachten, daß es sich bei W_i um ein Wahrscheinlichkeitsmaß und nicht um das Lebesgue-Maß des R^1 handelt. Das bedeutet, daß für W(dx) die Eigenschaft 3b sicher nicht formuliert werden kann. Damit entfällt also die Eigenschaft 3. Nun ist die Eigenschaft 4 eine direkte Konsequenz der Eigenschaft 3 zusammen mit der Kettenregel der mehrdimensionalen Differentialrechnung (vgl. z.B. [5], [7]). Also ist auch die Eigenschaft 4 für (3) nicht zu erreichen. Anstelle der Eigenschaft 1 erhält man mit dem üblichen Satz von Fubini (vgl. [3], S. 118) die Formel

$$W(dx) = \bigotimes_{i \in K} W_i(dx^i) \otimes \bigotimes_{i \in I-K} W_i(dx^i), \tag{9}$$

wenn K eine endliche Teilmenge von I ist. Aber auch die entsprechende Formel für eine unendliche Teilmenge K von I läßt sich mit der Konstruktion des Produktmaßes und dem üblichen Satz von Fubini nachprüfen. Eine 3a) entsprechende Eigenschaft läßt sich erreichen, wenn alle Wahrscheinlichkeitsmaße $W_j(dx^j)$ des R^1 gleich sind, also gilt:

$$W(dx) = \bigotimes_{i \in I} W(dx^i). \tag{10}$$

Bekanntlich beschreibt man in den Integrationsräumen von Vielteilchensystemen die Teilchenvertauschung in den Funktionen einfach durch Variablenumbenennung, da das Bezugsmaß, das Lebesgue-Maß, sich bei diesem Umbenennen nicht verändert. Dies ist genauso einfach bei dem in (10) gekennzeichneten Bezugsmaß.

In gewissen Fällen läßt sich aber auch das partielle Integrieren, nämlich die Eigenschaft 2 übertragen. Die Eigenschaft 2 ist neben der Anwendung des Satzes von Fubini nichts anderes als eine eindimensionale Integrationsregel der Form

$$\int_{a^j}^{b^j} \frac{\partial}{\partial x^i} f(\ldots, x^j, \ldots)\, \mu_L(dx^j) = f(\ldots, b^j, \ldots) - f(\ldots, a^j, \ldots), \tag{11}$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x^j} f(\ldots, x^j, \ldots)$ besagt, daß die ursprünglich von allen Variablen abhängige reellwertige Funktion $f(\ldots, x^j, \ldots)$ nur für die Komponente x^j als veränderlich angesehen wird und nach dieser Variablen zu differenzieren ist. In der Differentialrechnung in unendlich-dimensionalen Räumen nennt man solche Ableitungen auch Gâteaux-Ableitungen im Unterschied zur schärferen Fréchet- oder Funktionalableitung (vgl. [12]–[15]).

Wir beschränken uns auf den Fall, daß $W_i(dx^i)$ eine stetig differenzierbare (nur von x^i abhängige) Dichte $\varrho_i(x^i) \neq 0$ gegen das Lebesgue-Maß des R^1 besitzt:

$$W(dx) = \bigotimes_{i \in I} \varrho_i(x^i)\, \mu_L(dx^i). \tag{12}$$

Dann kann man die obige Gleichung umschreiben als

$$\begin{aligned} &\int_{a^j}^{b^j} \frac{1}{\varrho_j} \frac{\partial}{\partial x^j} f(\ldots, x^j, \ldots)\, \varrho_j\, \mu_L(dx^j) \\ &= \int_{a^j}^{b^j} \frac{1}{\varrho_j} \frac{\partial}{\partial x^j} f(\ldots, x^j, \ldots)\, W_j(dx^j) = f(\ldots, b^j, \ldots) - f(\ldots, a^j, \ldots). \end{aligned} \tag{13}$$

Integriert man diese Beziehung noch über $\bigotimes_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} W_i(dx^i)$, erhält man mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} &\int_{a^i \le x^i \le b^i} \frac{1}{\varrho_j} \frac{\partial}{\partial x^j} f(\ldots, x^j, \ldots) \bigotimes_{i \in I} W_i(dx^i) \\ &= \int_{\substack{a^i \le x^i \le b^i \\ i \neq j}} f(\ldots, b^j, \ldots) \bigotimes_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} W_i(dx^i) - \int_{\substack{a^i \le x^i \le b^i \\ i \neq j}} f(\ldots, a^j, \ldots) \bigotimes_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} W_i(dx^i). \end{aligned} \tag{14}$$

Für den Fall, daß I abzählbar ist, kann man sich hier f mit j indiziert denken und über j summieren. Dann muß man aber für die Gültigkeit dieser Formel auch die Konvergenz der einzelnen Reihen voraussetzen. Diese hier gebrachte Abschwächung der Gaußschen Integralformel hat den Nachteil, daß sie nicht invariant ist gegen allgemeine Abbildungen des R^I in sich. Ist $W_i(dx^i) = W(dx^i)$, also $\varrho_i(x^i) = \varrho(x^i)$, ist die Formel invariant gegen das Variablenumbenennen. Skorohod [1] hat für die von ihm definierten Maße in Hilberträumen eine entsprechende Formel angegeben, für die diese Eigenschaft nicht erreichbar ist; dafür sind für sie Abschwächungen der Eigenschaft 4 gegeben, wodurch sie eher der Gaußschen Integralformel entspricht. Entsprechendes gilt für die von Goodman [18] und Kuo [19] angegebenen Formeln.

Schränkt man den R^I für abzählbare Mengen I auf den üblichen reellen Hilbertschen Folgenraum X ein, den L^2 bezüglich des Zählmaßes auf I, liegt es nahe, nach dem durch (10) in diesem Hilbertraum induzierten Maß zu fragen. Die Maßtheorie in Hilberträumen ist von verschiedenen Autoren ausgearbeitet worden (vgl. [1], [2], [16] bis [21]). Man betrachtet dort endlich-dimensionale lineare Teilräume L von X mit der Borelschen σ-Algebra $\mathbf{B}_L$. Mit der Orthogonalprojektion P_L auf L erhält man für jedes L durch $P_L^{-1}(\mathbf{B}_L) = \mathbf{B}^L$ eine σ-Algebra auf X. Die Vereinigung aller dieser σ-Algebren $\mathbf{B}_0 = \bigcup_L \mathbf{B}^L$ ist zwar keine σ-Algebra, aber eine Algebra auf X (vgl. [1], S. 2). Die von $\mathbf{B}_0$ erzeugte σ-Algebra ist die Borelsche σ-Algebra des Hilbertraums X, also die von den offenen (abgeschlossenen) Teilmengen des Hilbertraums erzeugte σ-Algebra. Mit Hilfe einer Familie verträglicher Maße für die endlich-dimensionalen Teilräume läßt sich ein Inhalt auf $\mathbf{B}_0$ definieren. Es sei $L_n \subset L_{n+1}$ eine Folge endlich-dimensionaler Teilräume mit den Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_{L_n} auf $\mathbf{B}_{L_n}$, wobei $\bigcup_n L_n$ eine dichte Teilmenge des Hilbertraums ist. Diese Maße sind verträglich, wenn gilt:

$$\mu_{L_n}(A) = \mu_{L_{n+1}}(P_{L_n}^{-1}(A) \cap L_{n+1}). \tag{15}$$

Sie heißen eine Folge endlich-dimensionaler Verteilungen und liefern über

$$i(B) = \mu_{L_n}(A) \quad \text{für } B = P_{L_n}^{-1}(A) \tag{16}$$

einen Inhalt auf $\mathbf{B}_0$. Unglücklicherweise ist dieser Inhalt im allgemeinen kein Prämaß, man nennt ihn deshalb eine schwache Verteilung (vgl. [1], [2]). Wie man leicht sieht, kann man die von uns definierten Maße zur Definition eines solchen Inhalts auf $\mathbf{B}_0$ verwenden. Der über (10) auf $\mathbf{B}_0$ definierbare Inhalt ist kein Prämaß auf $\mathbf{B}_0$ (vgl. z.B. [2], S. 53, [1], S. 9, 20). Man erhält ein Prämaß auf $\mathbf{B}_0$, wenn sich die eindimensionalen Dichten $\varrho_i(dx^i)$ in (12) für wachsende i geeignet auf δ-Dichten „zusammenziehen" (vgl. [1], S. 18–20). Dies ist auch möglich durch eine Erweiterung des Hilbertraums X, indem man ein zweites Skalarprodukt mit Hilfe eines nuklearen Operators definiert und den Raum bezüglich der zugehörigen Norm (Metrik) vervollständigt zu einem Hilbertraum $\tilde{X}$ (vgl. [1], S. 23–26, Gross [2] definiert entsprechende Banachräume, vgl. auch [20]). Mit der oben definierten Folge endlich-dimensionaler Verteilungen läßt sich auf der Algebra $\mathbf{B}_0$ von $\tilde{X}$ ein auf Eins normierter Inhalt definieren, der ein Prämaß ist und sich deshalb zu einem Maß auf der von $\mathbf{B}_0$ erzeugten σ-Algebra fortsetzen läßt. Nach Skorohod [1] heißt dies ein verallgemeinertes Maß. In unserem Spezialfall des Hilbertschen Folgenraums als Teilmenge von R^I kann man den Raum $\tilde{X}$ noch einfacher erhalten. Man kann den ursprünglichen Hilbertschen Folgenraum als Integrationsraum über I lesen bezüglich des Zählmaßes. Den Hilbertraum $\tilde{X}$ erhält man als Integrationsraum über I, indem man das Zählmaß gegen ein absolut stetiges endliches Maß ersetzt. Dieses Maß ist aber nicht mehr invariant gegen Vertauschen der Indizes. Da $\tilde{X}$ das Maß Eins hat, ist das Maß von $R^I - \tilde{X}$ gleich Null, also $\tilde{X}$ eine wesentliche Teilmenge des R^I. Es ist klar, daß diese

Mengen nicht eindeutig sind. Da hier keine Maßtheorie für Hilberträume entwickelt werden soll, ist die Abgrenzung gegen die verallgemeinerten Maße nicht nötig. Für die hier gebrachte Theorie ist nur wichtig, daß es Funktionen auf dem R^I gibt, die differenzierbar sind und integrierbar bezüglich $\bigotimes_{i\in I} W_i(dx^i)$. Für die Definition der Ableitung wähle man dann einen wesentlichen normierten (oder metrischen) Teilraum des R^I, was nach dem vorigen immer möglich ist. Diese Situation entspricht in vielen Punkten dem Verhältnis der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen. Die disjunkten endlichen Vereinigungen rechts halboffener Intervalle aus rationalen Zahlen sind ein Ring und die Summe der Intervallängen definiert auf diesem Ring einen Inhalt, der kein Prämaß ist. Die kleinste σ-Algebra, die diesen Ring umfaßt, ist die Klasse aller Teilmengen der rationalen Zahlen. Der Inhalt läßt sich nicht zu einem Maß auf dieser σ-Algebra fortsetzen. Vervollständigt man die rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen, sind ebenfalls die endlichen Vereinigungen rechts halboffener Intervalle reeller Zahlen ein Ring, bei dem die Summe der Intervallängen einen Inhalt definieren, der ein Prämaß ist und zum Lebesgueschen Maß auf der vervollständigten Borelschen σ-Algebra fortgesetzt werden kann. Die Teilmengen der rationalen Zahlen bekommen nun das Maß Null. Trotzdem kann man eine „vernünftige“ Differentialrechnung auf diesen Teilmengen einführen, da die Funktionswerte stetiger und differenzierbarer Funktionen schon durch die Werte auf dichten Teilmengen festgelegt sind (vgl. [6], [7]).

5. Anwendung auf kinetische Gleichungen

Es sind zwei Sorten Differentialgleichungen für Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu unterscheiden. Manche benötigen bei der Ableitung partielle Integrationen, manche nicht. Die Master-Gleichung, wie die Hopf-Gleichung (vgl. [22]) benötigen keine partielle Integration, deshalb sind die vorkommenden Wahrscheinlichkeitsdichten in dem Fall abzählbar unendlich-vieler Freiheitsgrade einfach gegen das Maß $W(dx) = \bigotimes_{i\in I} W_i(dx^i)$ zu beziehen, ohne daß bei den Differentiationen etwas zu verändern ist. Anders ist es bei der Liouville-Gleichung, der Fokker-Planck-Gleichung und der Gleichung, die mit dem verallgemeinerten Stratonovich-Verfahren abgeleitet wurde (vgl. [23], [24]). Wir wollen die Betrachtungen auf den Fall beschränken, daß I abzählbar ist und die höheren Ableitungen der Taylorreihe durch partielle Ableitungen ausgedrückt werden können. Für die hier gebrachte Anwendung der partiellen Integration ist es nötig, daß sich die Ableitungen immer als partielle Ableitungen interpretieren lassen. Dies ist entsprechend in der Integrationstheorie in Hilberträumen der Fall (vgl. [1], [18]–[20]).

In den Ableitungen der letztgenannten kinetischen Gleichungen werden Ausdrücke der Form

$$\int \varphi(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \psi(x)\right) \mu_L(dx) \tag{17}$$

partiell integriert. Wir machen dies mit dem Bezugsmaß $W(dx)$:

$$\int \varphi(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \psi(x)\right) W(dx) \tag{18}$$

$$= \int \frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\varrho_i \varphi(x)\, \psi(x)\right) W(dx) - \int \psi(x) \frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\varrho_i \varphi(x)\right) W(dx).$$

Der erste Term wird mit (14) in das Randintegral umgewandelt und verschwindet, wenn φ und ψ geeignete Randbedingungen erfüllen. In den ursprünglichen Formeln, die gegen das Lebesgue-Maß bezogene Dichten verwenden, ist also nur $\frac{\partial}{\partial x^i}$ durch $\frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \varrho_i$ zu ersetzen.

Deshalb lautet zum Beispiel die Liouville-Gleichung für eine solche gegen W(dx) bezogene Dichte

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} (\varrho_i k^i f) = 0, \tag{19}$$

wenn gilt

$$\dot{x}^i = k^i(x,t). \tag{20}$$

Den in der Liouville-Gleichung zusätzlich erhaltenen Term

$$f\, k^i \frac{\partial \ln \varrho_i}{\partial x^i} \tag{21}$$

erhält man auch, wenn man die von Skohorod abgeleitete Formel für den Gaußschen Satz verwendet. Geht man über zur Differentialgleichung für das charakteristische Funktional, hebt sich beim richtigen partiellen Integrieren der Zusatzterm gerade weg, und man erhält die gewohnte von Hopf angegebene Differentialgleichung (vgl. [22]).

Entsprechend ist die Fokker-Planck-Gleichung zu modifizieren

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\varrho_i\, \mu^i w\right] + \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\varrho_i}{\varrho_j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\varrho_i\, \mu^{ij}\, w\right]\right] \tag{22}$$

und die Gleichung, die mit dem verallgemeinerten Stratonovich-Verfahren abgeleitet wurde (vgl. [24], Gl. (53), (54)):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\varrho_i\, k^i_a\, w\right) = D^+ \circ T^{-1+} w \tag{23}$$

mit

$$D^+ \circ T^{-1+} \approx -\frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big(\varrho_i \sigma^i + \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big(\frac{\varrho_i}{\varrho_j} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big(\varrho_j \sigma^{ij} \tag{24}$$

Diese Modifikationen sind unseres Erachtens für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden bisher noch nicht durchgeführt worden, was zu keinen Fehlern führte, da die kinetischen Gleichungen selbst meist nicht gelöst werden, sondern nur zur Ableitung von Momentengleichungen herangezogen werden [25]–[33]. Dabei wird das partielle Integrieren wieder rückgängig gemacht und die sich durch $\frac{1}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \varrho_i$ ergebenden Zusatzterme heben sich wieder weg. Deshalb sind auch diese Momentengleichungen nicht zu modifizieren.

Von dieser Art sind in unserer Arbeit [24] beim Stratonovich-Verfahren die Operatorgleichung (43) und bei der Ableitung der Fokker-Planck-Gleichung die Gleichung (14)/(18). In ihnen ist $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nicht durch $\frac{1}{\varrho_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\,\varrho_i$ zu ersetzen, sondern nur die Summation auf abzählbar viele Indizes auszudehnen.

Der Ersatz des Lebesgue-Maßes als Bezugsmaß durch das Wahrscheinlichkeitsmaß W(dx) hat zum Verzicht auf die Bewegungsinvarianz des Bezugsmaßes geführt, dafür hat aber das Wahrscheinlichkeitsmaß W(dx) sogar im Fall endlich vieler Freiheitsgrade einen Vorteil, den das Lebesgue-Maß nicht hat. Die Funktionen, die von weniger als allen Variablen abhängig sind, sind grundsätzlich für das Lebesgue-Maß nicht integrabel bzw. quadratintegrabel usw., während sie es beim Bezugsmaß W(dx) sein können. Die (n-1)-Teilchenzustandsfunktionen kann man z.B. nicht als Elemente eines n-Teilchenzustandsfunktionsraums betrachten, wenn man das Lebesgue-Maß für die quadratintegrablen Funktionen als Bezugsmaß verwendet. Bei dem Bezugsmaß W(dx) sind sogar die Zustandsfunktionen von endlich vielen Freiheitsgraden Elemente des Zustandsraums für unendlich-viele Freiheitsgrade, ohne daß man zum Fock-Raum übergehen muß.

Allen Mitarbeitern des Lehrstuhls B für Theoretische Physik danken wir für nützliche Diskussionen. Einer von uns (W. Wulbrand) dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung.

Literatur

[1] A. V. Skorohod, Integration in Hilbert Space, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 79, Springer (Berlin 1974).
[2] L. Gross, Classical Analysis on a Hilbert Space, in Analysis in Function Space, Hrsg. W. I. Martin, I. Segal, MIT Press (Cambridge 1964).
[3] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, de Gruyter (Berlin 1974).
[4] P. R. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand (New York 1950).
[5] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill (Tokyo 1976).
[6] H. Grauert u. I. Lieb, Differential- und Integralrechnung I, Heidelberger Taschenbücher, Bd. 26, Springer (Berlin 1967).
[7] H. Grauert u. W. Fischer, Differential- und Integralrechnung II, Heidelberger Taschenbücher, Bd. 36, Springer (Berlin 1968).
[8] H. Grauert u. I. Lieb, Differential- und Integralrechnung III, Heidelberger Taschenbücher, Bd. 43, Springer (Berlin 1977).
[9] v. Mangolt-Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 3 u. Bd. 4, Hirzel Verlag (Stuttgart 1975).
[10] H. Reichardt, Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung, Deutscher Verlag der Wissenschaften (Berlin 1957).
[11] G. Gerlich, Vektor- und Tensorrechnung für die Physik, Vieweg (Braunschweig 1977).
[12] J. Dieudonne, Grundzüge der modernen Analysis, Bd. 1, Vieweg (Braunschweig 1971).
[13] M. J. Field, Differential Calculus and its Applications, Van Nostrand (New York 1976).
[14] K. B. Gundlach, Infinitesimalrechnung, Vieweg (Braunschweig 1973).

[15] K. Bögel u. M. Tasche, Analysis in normierten Räumen, Akademie Verlag (Berlin 1974).
[16] K.O. Friedrichs, H.N. Shapiro et al., Integration of Functionals, Lecture Note, Courant Institute of Mathematical Sciences (New York 1957).
[17] K.R. Parthasaraty, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press (New York 1967).
[18] V. Goodman, A Divergenz Theorem for Hilbert Space, Trans. Am. Math. Soc. 164 (1972), 411.
[19] Hui-Hsiung, Kuo, Gaussian Measures in Banach Spaces, Lecture Notes in Mathematics, Nr. 463, Springer (Berlin 1975).
[20] Hui-Hsiung, Kuo, Integration Theory on Infinite-Dimensional Manifolds, Trans. Am. Math. Soc. 159 (1971), 57.
[21] K.D. Elworthy, Measures on infinite-dimensional manifolds, in Functional integration and its applications, Proceedings Internat. Conf. Cumberland Lodge, ed. A.M. Arthurs, Clarendon Press (Oxford 1975).
[22] E. Hopf, Statistical Hydrodynamics and Functional Calculus, J. Rat. Mech. Analysis 1 (1952), 87.
[23] G. Gerlich, Eine Verallgemeinerung des Stratonovich-Verfahrens für Anwendungen in der statistischen Mechanik, Physica 82 A (1975), 477.
[24] A. Emmerich, G. Gerlich u. H. Kagermann, Particle Motion in Stochastic Force Fields, Physica 92 A (1978), 362.
[25] R. Balescu u. A. Senatorski, A New Approach to the Theory of Fully Developped Turbulence, Annals of Physics 58 (1970), 587.
[26] J.R. Herring, Self-Consistent-Field Approach to Turbulence Theory, Physics of Fluids 8 (1965), 2219.
[27] J.R. Herring, Self-Consistent-Field Approach to Nonstationary Turbulence, Physics of Fluids 9 (1966), 2106.
[28] J. Lee, Statistical Mechanical Approaches to Fluid Turbulence, J. Mathematical Physics 15 (1974), 1571.
[29] S.F. Edwards, The Statistical Dynamics of Homogenous Turbulence, J. Fluid Mech. 18 (1964), 239.
[30] W. Kollmann, Functional Integrals in the Statistical Theory of Turbulence and the Burgers Model Equation, J. Statistical Physics 14 (1976), 291.
[31] H. Haken, Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems, Reviews of Modern Physics 47 (1975), 67.
[32] R. Graham, Generalized Thermodynamic Potential for the Convection Instability, Physical Review Letters 31 (1973), 1479.
[33] R. Graham, Hydrodynamic fluctuations near the convection instability, Physical Review A 10 (1974), 1762.